数理解析研究所講究録
476巻 1983年 224-230

二次元渦糸群の統計的性質

東大　理学部物理　崎山雅行

§1　Introduction

完全流体中にある渦糸群の統計力学的性質を調べることは，二次元高Reynolds数乱流との密接な関連からも興味深い問題である。この系の運動方程式は，渦糸の位置座標を正準共役な変数とした正準方程式で表わされる。そのために，有界領域あるいは週期的境界条件のもとでは，Onsagerによって指摘されたように，いわゆる'負温度'の状態が起こりうる。この状態においては同一符号の循環を持つ渦糸が塊りをつくり，各々の異符号の渦糸の塊りは分離してくると予想される。そしてこの巨視的構造は境界の影響により空間的に固定されると考えられる。(時間的には変動するかもしれない。)この構造のエネルギー依存性及び境界の形(ここでは矩形境界が扱われる。)に対する依存性を，これまでに為された研究を踏まえながら，摂動法及びSine-Gordon方程式に対して開

発されている非線形変換による変数分離法を適用することによって調べた。

§2. Formulation と仮定について

よく知られているように有界領域にある渦系の運動方程式は次のようになる。(Lin)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_i} \\ \dfrac{dy_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases}$$

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i \neq j}\sum \Gamma_i \Gamma_j G(\vec{r}_i, \vec{r}_j) - \frac{1}{2}\sum_i \Gamma_i g(\vec{r}_i, \vec{r}_i)$$

$$\triangle G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad , \quad G = 0 \quad \text{on boundary}$$

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{1}{2\pi} \log|\vec{r} - \vec{r}'|$$

ここで $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$ は渦糸の位置座標であり，Γ_i はその渦糸の循環である。ここでは簡単のため N 個の渦糸の循環を次のように仮定する。

$$\begin{cases} \Gamma_i = \Gamma & (i = 1, 2, \cdots, m^+N) \\ \Gamma_i = -\Gamma & (i = m^+N+1, \cdots, N) \end{cases}$$

ここで一般性を失うことなく $m^+ \geqq m^- (= 1 - m^+)$ と仮定しておく。Pointin & Lundgren は，統計集団としてミクロカノニカル集団を仮定し，更にいくつかの仮定（温度のスケーリング等。）を

用いて平均位置分布関数に対する一連の方程式を求め，そのヒエラルキーを打ち切るためにVlasov近似と同じfactrized solutionを仮定し次の方程式を導いた。

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} P^{\pm}(\vec{r}) = \pm 8\pi\lambda P^{\pm}(\vec{r}) \int_D d\vec{r}' \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \vec{r}} \left[m^+ P^+(\vec{r}') - m^- P^-(\vec{r}') \right] \cdots\cdots (1)$$

ここで $\lambda \equiv \frac{N\Gamma^2}{8\pi k_B T}$ である。

この方程式はMontgomery & Joyceによってもほとんど同じような手法で導びかれている。彼等の用いた仮定のうち温度のスケーリング（$N \to \infty$ のとき $\lambda = O(1)$）とfactrized formを除けば，$m^+ \neq m^-$ の場合には，'fluid limit'（$N \to \infty$, $\Gamma \to 0$, $N\Gamma = \text{const.}$）をとったものとして理解できる。一方，この方程式は木田，Lundgren & Pointinによって行なわれたように，粗視化された分布のうちで最も確からしいものが満足すべき方程式としても導びかれる。なおこの後者の方法は粗視化プロセスをprojectionとして処理することにより，見通し良く適用することができる。

§3．解析

非線形方程式(1)の解については数値的にPointin-Lundgren等によって調べられているが，$m^+ > m^-$ のときには境界の形に依らず P^+ は一つの極大又は極小を持ち境界と同じ対称性を持った解しか求められていない。しかし以下で述べるように m^+/m^- の値がある範囲にあればエネルギーの高い所では $m^+ = m^-$ の場

合と同様に，複数個の極大極小点を持ち，より対称性の低い解も存在することがわかる。この解の一意性とその意味については§4.において少し触れる。

方程式(1)は $\rho^{\pm}(\vec{r}) = C^{\pm}\exp(\pm\phi(\vec{r}))$ と変換することによって，扱い易いようにしておく。

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 8\pi\lambda\left[n^{+}\frac{e^{\phi(\vec{r})}}{\int_D e^{\phi(\vec{r}')}d\vec{r}'} - n^{-}\frac{e^{\phi(\vec{r})}}{\int_D e^{-\phi(\vec{r}')}d\vec{r}'}\right] \quad \cdots\cdots (2)$$

B.C. $\quad \phi = 0$ on boundary.

1) 摂動法の適用

① $|\lambda| \ll 1$ のとき $\phi = \lambda\phi^{(1)} + \lambda^2\phi^{(2)} + \cdots$ と展開して二次までの解を求めることにより，エネルギーが高い解ほどその状態の温度が高く，エントロピーが小さく，エネルギーの低波数への分配率が大きいということがわかる。もし($L_x > L_y$として) $L_y/L_x > 0.212$ ならば最低波数モードのみがエネルギーの増加と共に増幅される。

② $\beta \equiv n^{+} - n^{-} \ll 1$ のとき $\phi = \beta\phi^{(1)} + \beta^2\phi^{(2)} + \cdots$ と展開して調べると $L_y/L_x < 0.892$ のときには most probable state の解が境界の対称性よりも低い対称性しか持たなくなり，更にエネルギの値だけでは一意に決まらなくなるというエネルギーの閾値が存在するということがわかる。この分岐は明らかに $n^{+} = n^{-}$

のときに Lundgren-Pointin によって示された分岐と本質的に同じ性質をもつものであり，$m^+ \neq m^-$ のときにも存在することがわかった．そしてこの分岐は解の構造から明らかなように対称性の低下を伴う cusp 型分岐点の一例となっている．

ii) 非線形変換による変数分離法の適用

方程式 (2) は，$m^- \int_D dS\, e^{\phi} = m^+ \int_D dS\, e^{-\phi}$ という条件のもとで，

$$\tilde{\Delta}\phi(\tilde{r}) + \sinh\phi(\tilde{r}) = 0 \qquad \tilde{r} \equiv \sqrt{\frac{16\pi m^+ |\lambda|}{\int_D dS\, e^{\phi}}} \cdot r \quad \cdots\cdots (3)$$

B.C. $\phi = 0$ on boundary.

と整理できる．Lamb 等によって Sine-Gordon 方程式に対して見つけられている非線形変換による変数分離法を，(3) に適用することによって求める．結果として次の解が得られる．

$$\phi = \log\left[\frac{1 + A\cdot \mathrm{cn}(\kappa_1 \tilde{x}, k_x)\cdot \mathrm{cn}(\kappa_2 \tilde{y}, k_y)}{1 - A\cdot \mathrm{cn}(\kappa_1 \tilde{x}, k_x)\cdot \mathrm{cn}(\kappa_2 \tilde{y}, k_y)}\right]^2$$

ここで $\mathrm{cn}(\cdot,\cdot)$ はヤコビの楕円関数であり

$$A^2 = \frac{\kappa_2^2 + k_2}{\kappa_1^2 - k_1}, \quad k_x^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_1}{\kappa_1^2}\right), \quad k_y^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_2}{\kappa_2^2}\right)$$

$$\kappa_1 = (k_1^2 + \varepsilon)^{1/4}, \quad \kappa_2 = (k_2^2 + \varepsilon)^{1/4}, \quad k_1 + k_2 = -1, \quad \varepsilon > 0$$

更にこれらのパラメーターを，与えられた m^+, m^-, L_x, L_y の値に対して決定するには少々面倒な連立方程式を解かなけ

ればならない。これを解くことによって次のようなことがわかる。$m'/m>2$ の場合，1つの極大のみを持つ解だけが得られ，その解は以前の数値解法によって得られている解と良く一致する。更に $m'/m<2$ の場合には，上に述べた唯一の極大あるいは極小を持つ解の他に複数の極大，極小点を持つ解がエネルギーの高い領域に存在することがわかった。その解の個数は，当然ではあるが，m'/m の値により決まり m'/m が1に近いほど多くなる。

§3. 考察

§2の1)の例で示されたように $L_y/L_x<0.892$ のとき most probable state の対称性が低下する。ところが全相空間平均として定義された平均分布関数はハミルトニアンの対称性を保持していなければならない。つまりそのようなエネルギーの領域において(1)は平均分布関数に対する方程式としては正しくないということであり，factrized solution の仮定が良くないということになる。しかし(1)は対称性の制約をうけない最も確からしい分布に対する方程式としても導びかれるのだから，得られた解の解釈さえ間違えなければ物理的に意味あるものと思われる。更にエネルギーだけでは一意に決まらないという意味は物理的には大きなゆらぎを示すのかもしれない。

又 §2, ii)で得られた解が most probable state を表わすかどうかはこれだけの解析では決論できない。これらの結果を踏まえて，数値的にもっと詳しく調べることと，計算機シミュレーションによる詳しい解析が将来の課題であると思われる。